

数学的な見方・考え方を育てる数学科学習指導
～数学的モデル化を位置づけた問題解決を通して～

要約

文部科学省より、平成 29 年 3 月に提示された学習指導要領では、学習の質を一層高めるために、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善（アクティブラーニングの視点に立った授業改善）が推進されている。その中でも、「深い学び」の鍵として、各教科における「見方・考え方」を働かせることが重要になると記されている。「見方・考え方」とは、「どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考していくのか」という視点や考え方のことである。

数学科においては、「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」を「数学的な見方・考え方」としている。現実の事象について、習得した知識及び技能を活用して探求することにより、知識・技能を高めるとともに、それらを用いて物事を数学的に判断する力や、自分の考えを数学的な表現（表・式・グラフ・図）を用いて説明する力を、授業実践を通して生徒につけていきたいと考えた。そこで本主題を設定し、以下の 3 点に着目して研究を進めることとした。

- 身近な事象から問題を設定し、生徒が興味関心を持てるよう工夫する。
(問題場面の設定)
- 生徒が実際に操作を行う事で、現実の事象を数学的に捉えられるようにする。
(数学的モデル化の設定)
- 得られた結果から、他の場面でも利用できることに気付かせる。(類似問題の提示)

検証Ⅰでは、「グランドキャニオンのおよその高さをボールを使って測る」という問題場面を設定した。実際に記録タイマーを用いてボールが落ちる時間と距離の関係を調べさせ、関数 $y = ax^2$ の考えを利用し、高さを求める活動を行った。

検証Ⅱでは、「MサイズのピザとLサイズのピザはどちらが得か」という問題場面を設定した。ピザを図形（円）とみなして、直径から相似比・面積比を求めることで、面積に対する料金の比例式を立てさせ、実際の金額と比べることでどちらのサイズが得か判断をさせた。また、食品や調味料も用意し、立体においても体積比を使って同様に考えられるか確かめさせた。

実践の結果、以下のような成果（○）と課題（●）が得られた。

- 問題解決の場面において、数学的モデル化を位置づけた授業展開をしたことで、生徒が事象を数学的に捉えることができているので、数学的結論を導く上で有効であった。
- まとめ・振り返りの場面において、類似の場面を用いて考え方を活用させたことで、生徒が日常生活の中で同様の場面を見だし、事象を数学的に捉えようとする姿勢を育てることができた。このことは、数学的な見方・考え方を育てることにつながったと考えられる。
- 表・式・グラフ・図などを用いた説明の仕方について、説明のモデルを提示したり、ペアで説明を評価し合う活動を仕組むなど、手立てを工夫する必要がある。

キーワード 数学的な見方・考え方 数学的モデル化 数学的に判断・説明する力

1 主題設定の理由

(1) 現代社会の動向から

現在、生産年齢人口の減少、グローバル化の進展や絶え間ない技術革新等により、社会構造や雇用環境は大きく、急速に変化しており、予測が困難な時代となっている。人工知能(AI)の飛躍的な進化や、ロボット工学の発展から、今後は現存する職業の約50%はコンピューターによって自動化されてしまうという研究予想もあるように、国際的にも厳しい競争を乗り越えていく力を子供たちにつけていかななくてはならない。そのような時代だからこそ、知識を得るだけでなく、現実の事象の中から問題を見だし、他者と協働して課題を解決していくことや、その結果をもとに様々な情報を見極め知識の概念的な理解をし、新たな価値につなげていこうとする姿勢が求められている。

文部科学省より、平成29年7月に提示された新学習指導要領では、学習の質を一層高めるために、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善（アクティブラーニングの視点に立った授業改善）が推進されている。「何ができるようになるか」、「何を学ぶか」を考えるだけでなく、「どのように学ぶか」に焦点をあて、学習指導内容の改善・充実を目指すことが大切になると考えられる。また、「深い学び」を実現するためには、与えられた課題を解決するだけでなく、現実の事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えることを通して、数学に創造的に取り組もうとする態度を養うことが重要になると考えられる。

(2) 生徒の実態から

本学級の生徒は35名で、落ち着いた授業態度で学習することができる学級である。平成29年度全国学力・学習状況調査における生徒質問紙の集計を見ると、「数学の勉強は大切だと思いますか」という質問に対しては84.4%、「数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つと思いますか」に対しては90.7%の生徒が当てはまると答えている。一方で、「数学の勉強は好きですか」に対しては56.2%、「数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考えますか」に対しては56.3%の生徒が当てはまると答えていた。このことから、本学級の生徒は数学という教科に対して前向きな捉え方をしているが、実際に授業で学んだことが社会においてどのような場面で活用されているか実感できていない。「数学的な見方・考え方」を育てるためには、数学を好きだと思えることや、学んだことの有用性を実感することは不可欠である。また、現実の事象を数学的に捉え、課題解決する活動を充実することで、普段の生活の中で数学を活用しようとする意欲が増し、そういった活動や経験が「数学的な見方・考え方」をより一層豊かにし、確かなものになると考えた。そのため、現実の事象から問題を見だし、数学的モデル化を用いて事象を数学的に捉えさせることで、生徒は既習の学習内容を活用して問題解決することができ、数学的な知識・技能や、数学的に判断・説明する力が向上し、数学的な見方・考え方を育てることができると考え、本主題と副主題を設定した。

2 主題・副題の意味

(1) 主題の意味

「数学的な見方・考え方」とは、事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えることである。

「数学的な見方・考え方を育てる」とは、現実の事象について、習得した知識・技能を活用して探求することにより、知識・技能を高めるとともに、それらを用いて物事を数学的に判断する力や、自分の考えを数学的な表現（表・式・グラフ・図）を用いて説明する力を育てることである。そのためには、事象を数学的に捉え、既習の学習内容を用いて結論を導き、筋道立てた説明ができるようになることが重要であると考える。

そこで、「数学的な見方・考え方の育った生徒」の具体的な姿を次の三つと捉える。

- 事象を数学的に捉えることができる生徒
- 数学的結論を導くことができる生徒
- 数学的な表現を用いて説明ができる生徒

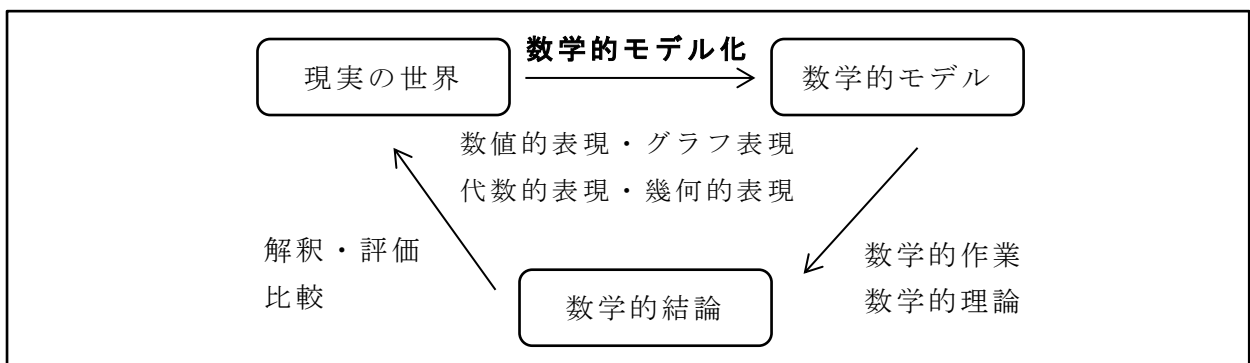
(2) 副題の意味

「数学的モデル化」とは、事象をある目的に従って、数学的な処理が可能な数値的表現・グラフ表現・代数的表現・幾何的表現によって表すことである。

それぞれの表現を三輪（1983）は次のように定義している。

数値的表現…測量や測定によって現実の事象を数値化すること。
グラフ表現…棒グラフや関数のグラフを用いて視覚化すること。
代数的表現…文字式を用いて一般化した形で表すこと。
幾何的表現…図を用いて表すこと。

「数学的モデル化を位置づけた問題解決」とは、「問題を見いだす」→「解決方法の模索」→「数学的モデル化」→「問題解決」→「まとめ・振り返り」の5つのプロセスのことである。（資料1）現実の事象から見いだした問題を解決するために、問題解決のための方法を考え、事象を数学的モデル化して捉えることで、生徒が主体的に既習の学習内容を活用することを促し、数学的な知識・技能の向上や、数学的に判断・説明する力を育成することを目的としたものである。本研究では、この5つのプロセスを学習過程として考え実践を行っていく。



【資料1 数学的モデル化過程】

3 研究の目標

現実の事象から問題を見だし、数学的に捉え、既習の学習内容を活用して問題解決させることで、数学的な知識・技能の向上や、数学的な見方・考え方の育成を目指した授業について究明する。

4 研究の仮説

現実の場面において、数学的モデル化を用いて事象を数学的に捉え、解決方法を探る活動を設定すれば、生徒は既習の知識・技能を用いて問題解決を行い、数学的な知識・技能や、数学的に判断・説明する力が向上するので、数学的な見方・考え方を育てることができるであろう。

5 仮説検証の内容と方法

(1) 検証の対象 小郡市立立石中学校 第3学年1組 (35名)

項目	検証内容	検証方法
事象を数学的に捉えることができたか。	現実の事象を数学的モデル化を用いて数学的に捉えることができているか。	ワークシート アンケート
数学的結論を導くことができたか。	作業や数学的思考を用いて、問題解決することができているか。	ワークシート アンケート
数学的結論や判断した内容を説明することができたか。	自分で導いた数学的結論や、判断した内容を説明することができているか。	ワークシート

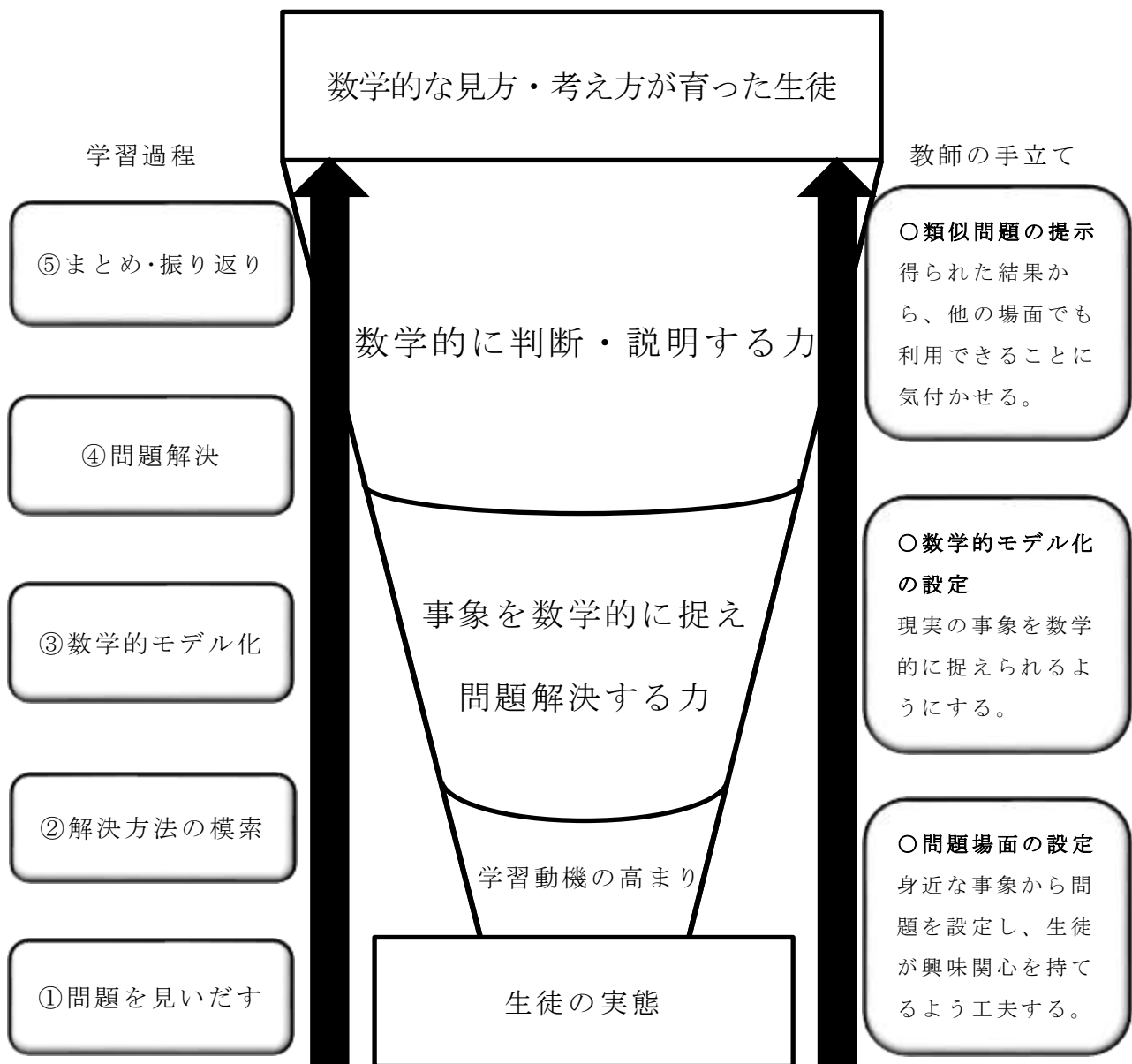
(2) 検証の内容・方法

項目	評価	評価の観点
事象を数学的に捉えることができたか。	A	現実の事象から問題を見だし、数値的表現・グラフ表現・代数的表現・幾何的表現などを用いて数学的に捉えることができる。
	B	現実の事象から問題を見いだすことができる。
	C	A、B以外
数学的結論を導くことができたか。	A	既習の知識・技能を用いて作業や数学的思考をし、数学的結論を導き出すことができる。
	B	既習の知識・技能を用いて作業や数学的思考をすることができる。
	C	A、B以外
数学的結論や判断した内容を説明することができたか。	A	導き出した数学的結論や判断した内容を、筋道立てて説明することができる。
	B	導き出した数学的結論や判断した内容を説明することができる。
	C	A、B以外

6 研究計画

	研究内容	9月	指導案作成
4月	研究計画の審議	10月	検証授業Ⅰ及びデータ収集・分析
5月	研究主題の設定	11月	検証授業Ⅱ及びデータ収集・分析
6月	理論研究、実態把握	12月	研究のまとめ
7月	理論研究	1月	研究のまとめ
8月	仮説の設定、教材分析	2月	研究報告会

7 研究構想図



8 研究の実際

(1) 実践 I 「関数 $y = ax^2$ の利用」

①本時の主眼

ボールの落下する距離と時間の関係を調べ、それをもとに問題を解決する活動を通して、現実の事象の中でこれまでの学習内容が活用できるようになることをねらいとしている。

②展開

過程	学習内容・活動	形	具体的な支援
問題を見いだす	1 写真を見て、崖のおよその高さを求める方法を考える。 (1) 写真から、高さを予想する。  (2) 高さを測る方法を考える。	全	<ul style="list-style-type: none"> 生徒の関心を高めるために、写真を提示し、高さを予想させる。 現実的には高さを測るのが難しいことに気付かせるために、高さを測る方法を考えさせる。
解決方法の模索	2 めあてを確認し、学習の見通しを持つ。 (1) ボールを使って高さを測る方法を考える。 (2) ボールが落ちる距離と時間の関係に着目する。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> ボールを使って崖のおよその高さを測ってみよう。 </div>	全	<ul style="list-style-type: none"> ソフトボールを提示し、ボールを使っておよその高さを測ることができると伝える。 距離と時間の関係に着目させるために、崖のおよその高さを測るに必要な情報は何か問いかける。
数学的モデル化	3 ボールが落ちる距離と時間の関係を調べる。 (1) 記録タイマーを使って、ボールが落ちる距離と時間の関係を調べる。 【数値的表現】 (2) 実測で得たデータを表にまとめ、グラフ化する。 【グラフ表現】	全 ↓ 小集団 ↓ 個	<ul style="list-style-type: none"> 記録タイマーの使い方を説明する。 ボールが落ちる距離と時間の関係を調べさせるために、記録タイマーを使って実測する時間を設ける。 ボールが落ちる距離と時間の関係が $y = ax^2$ の関係になることに気付かせるために、実測で得たデータを座標でまとめてグラフの形を確認させる。
問題解決	4 ボールが落ちる距離と時間の関係を $y = ax^2$ とみなして問題を解決する。 (1) 班ごとにまとめたデータを発表する。 (2) 実測値を使って、 $y = ax^2$ の形で表す。 (3) 式を使って、崖のおよその高さを求める。	小集団 ↓ 全 ↓ 個	<ul style="list-style-type: none"> 実測したデータが概ね正しいことを確認するために、班ごとにグラフや数値を提示させ、全体で確認する。 崖のおよその高さを求めるために、実測値を使って $y = ax^2$ の比例定数を求めさせる。
まとめ・振り返り	5 本時の学習内容をまとめる (1) 実際の高さと計算で求めた高さを比較し、およその高さを求められたことを確認する。 (2) 自然落下の事象において、 $y = 4.9x^2$ (y : 距離 x : 時間) の関係が成り立つことを知る。 (3) 同様の方法でおよその身長を測ることができるか確かめる。	個 ↓ 全 ↓ ペア	<ul style="list-style-type: none"> 誤差はあるが、およその高さを求められたことを実感させるために、実際の高さと計算で求めた高さを比較させる。 一般的に、自然落下の事象では、$y = 4.9x^2$ の関係が成り立っていることを教える。 類似の場面で本時の内容が活用できると実感させるために、ボールを使っておよその身長を測らせる。

③考察

【問題を見いだす】場面では、グランドキャニオンの写真を提示し、実際の高さは何mくらいになるかを予想させた。(写真1)ここでは、ICTを活用して導入をしたことで、生徒が意欲的に問題場面を捉えようとする姿があった。

【解決方法の模索】の場面では、崖のおよその高さを求める方法を考えさせた。ここでは、実際には測定するのが難しいことを確認した上で、ソフトボールを提示し、「このボールだけで崖のおよその高さを測ることができる」と投げかけた。ボールが落ちるのにかかる時間と距離の関係がわかれば、それを使っておよその高さを求められそうだという見通しを持たせることができた。

【数学的モデル化】の場面では、ボールと記録タイマーを用いて、ボールが落ちるのにかかる時間と距離の関係を調べさせた。(写真2)ここでは、グループの中で役割分担し、実際に測定をさせたことで、時間と距離の関係を意欲的に表にまとめようとする姿や、グラフ化しようとする姿が見られた。(写真3・4)また、どのグループの測定結果もグラフが放物線になっていたことで、ボールが落ちる時間と距離の関係が二次関数になりそうだと予想ができていた。

【問題解決】の場面では、時間と距離の関係を二次関数とみなして、求めた式を使って崖のおよその高さを求めさせた。ここでは、実測で得たデータを使って $y = ax^2$ の比例定数を求めようとしたが、比例定数を求める計算が複雑だったことで、スムーズに式を求めることができなかった。式を求める作業が中心ではなかったため、表計算ソフト等を利用して、およその高さを求める時間をもう少し確保する工夫が必要だった。

【まとめ・振り返り】の場面では、およその高さを確認し、同様の考え方で、およその身長を測る時間を設けた。ここでは、ボールとストップウォッチでデータを取り、意欲的に式を活用しておよその身長を求めようとする姿が見られた。しかし、どのようにしておよその身長を求めたか説明する場面で、筋道だった説明をできた生徒が少なかった。何を説明するのが明確にして、発問をするべきだったと考えられる。

<成果と課題> ○：成果 ●：課題

○数学的モデル化で、ボールが落ちる時間と距離の関係を調べたことで、意欲的に二次関数の学習内容を活用しようとする姿が見られた。

●説明をする場面で、何を説明するのが明確になっていなかった。



【写真1 ICTを活用した場面】



【写真2 数学的モデル化の場面】



【写真3 グラフ的表現】




【写真4 数値的表現】

(2)実践Ⅱ 「相似の利用」

①本時の主眼

広告からMサイズとLサイズのどちらが得かを判断し、根拠を明確にして説明する活動を通して、面積比や体積比を生活の中で活用できるようになることをねらいとしている。

②展開

過程	学習内容・活動	形	具体的な支援
問題を 見いだす	1 広告を見て、MサイズとLサイズのどちらが得か予想する。 (1)写真から、MサイズとLサイズのどちらが得か予想する。  (2)「得」の意味を確認する。	全	<ul style="list-style-type: none"> 生徒の関心を高めるために、Mサイズ、Lサイズのピザの箱を提示し、どちらが得か予想させる。 「得」の意味を全体で共有するために、簡単な例を提示して理解を図る。
解決方法の 模索	2 めあてを確認し、学習の見通しを持つ。 (1)どちらが得か判断する方法を考える。 (2)料金と面積比の関係に着目する。 MサイズとLサイズのどちらが得か判断しよう。	全	<ul style="list-style-type: none"> 面積や値段に着目させるために、どちらが得か判断する方法を考えさせる。 相似な図形の面積比が使えることに気付かせるために、MサイズとLサイズのピザをどんな図形とみなして考えれば良いか問いかける。
数学的モデル化	3 広告から数値を読み取り、面積比を使って比例式を作る。 (1)模型から必要な数値を読み取る。 【幾何的表現】 (2)読み取った数値をもとに、比例式を立てる。 【代数的表現】	個	<ul style="list-style-type: none"> ピザの模型(紙)を配布し、実際に大きさを測らせ相似比を求めさせる。 MサイズとLサイズのどちらが得か判断させるために、Mサイズの直径・料金をもとに、Lサイズの料金をxとおいた比例式を立てさせる。
問題解決	4 比例式を解いて求めた料金をもとに、MサイズとLサイズのどちらが得か判断し、説明する。 (1)比例式から求めた料金をもとに、どちらのサイズが得か根拠を明らかにして説明する。 (2)同様の方法で他のピザもどちらのサイズが得か考える。	ペア ↓ 全 ↓ 個	<ul style="list-style-type: none"> どちらが得か判断する方法の理解を深めさせるために、値段を具体的に示し、根拠を明確にして説明しあう時間を設ける。 面積比の使い方や、判断の仕方を確認するために、半径や料金が異なる事例で練習させる。
まとめ・ 振り返り	5 本時の学習内容をまとめる。 (1)面積比と同様に、相似な立体の体積比を使って判断できるか考える。 【幾何的表現】 【代数的表現】 (2)グループごとに、食べ物や調味料でどのサイズが得か根拠を明らかにして説明する。 (3)本時の学習内容を振り返る。	小集団 ↓ 全 ↓ 個	<ul style="list-style-type: none"> 立体でも同様に考えられることに気付かせるために、サイズの異なるカップ麺や飲み物をグループへ配布し、実測や計算することでどのサイズが得か判断させる。 相似な立体の体積比が使えることを確認するために、グループごとにどのサイズが得か根拠を明らかにして説明させる。 日常の事象を図形や立体とみなして考えることで、学習内容が活用できたことを確認する。

③考察

【問題を見いだす】の場面では、実際のピザの写真を提示し、MサイズとLサイズのどちらが得になりそうか予想させた。発問に対して、ほとんどの生徒が「Lサイズの方が得」だと予想した。(写真5)「どのくらい得か?」「本当にLサイズが得なのか?」といった疑問を持たせることができた。



【写真5 写真を提示している場面】

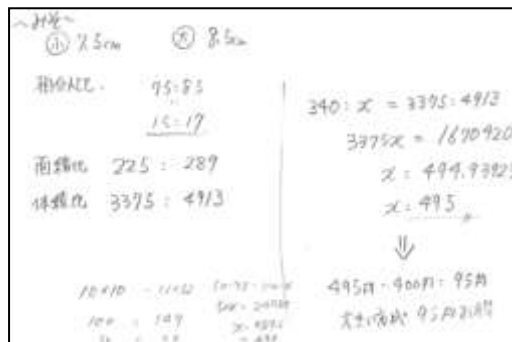
【解決方法の模索】の場面では、料金と面積の関係に着目させ、ピザを図形(円)として考えることで、面積比と料金の関係からどちらが得か考えることができそうだという見通しを持たせ、めあてを確認させた。料金を比べる際に、何に着目すると良いか問いかけたが、「大きさ」や「重さ」などの反応が多く、「面積」に上手く着目させることができなかった。



【写真6 数学的モデル化】

【数学的モデル化】の場面では、ピザの模型(紙)を配布し、直径を測らせることでMサイズとLサイズの相似比を求めさせ、面積比と料金についての比例式を立てさせた。

ここでは、実測で得た値から面積比を導く際に、数値が大きくなることから、電卓を使用させた。電卓を使用したことで、ほとんどの生徒がスムーズに面積比と料金に関する比例式を立てることができた。



【資料2 代数的表現】

【問題解決】の場面では、比例式を解いて得た結果をもとに、どちらのサイズが得か判断させ、ペアで説明しあう活動を設けた。比例式を解く際も、計算が複雑になる部分は電卓を使用させたことから、計算で出した値段と実際の値段を比べて、どちらのサイズが得になるか判断することができていた。



【写真7 説明をしている場面】

【まとめ・振り返り】の場面では、相似な立体でも同様に考えることができることに気付かせるために、各グループにサイズの違う食品や調味料を配布し、どちらのサイズが得か判断させ、考えを発表させた。(資料2)ここでは、実物を準備したことで意欲的に実測したり、どちらのサイズが得になるか

考えたりする生徒が多かった。発表の場面では、比例式で求めた値段と実際の値段を比較し、根拠を明確にした形で説明をすることができていた。(写真7)

<成果と課題> ○: 成果 ●: 課題

○【問題解決】の場面でペアで説明する活動をさせたことで、【まとめ・振り返り】の場面では、面積比の考え方を活用して、説明をすることができていた。

●【解決方法の模索】の場面で、面積比と料金の関係に気付かせる部分が教師主導になってしまった。

9 研究のまとめと今後の課題

(1) 検証の項目より

資料3は、検証項目の「事象を数学的に捉えることができたか」についての学習プリント分析の結果である。検証Iでは、Aの評価の生徒が30人中で18人(60%)、検証IIでは、30人中で23人(77%)だった。これは、現実の事象から問題を見だし、数学的モデル化をすることで、生徒の学習意欲が高まり、問題場面を理解しようとする生徒が増えたからだと考えられる。

資料4は、検証項目の「数学的結論を導くことができたか」についての学習プリント分析の結果である。検証Iでは、Aの評価の生徒が30人中で13人(43%)、検証IIでは、30人中で19人(63%)だった。これは、数学的モデル化で得た数値や式を用いて意欲的に問題解決をしたことで、自ら考え、数学的結論を導くことができる生徒が増えたのだと考えられる。

資料5は、検証項目の「数学的結論や判断した内容を説明することができたか」についての学習プリント分析の結果である。検証Iでは、Aの評価の生徒が30人中で11人(37%)、検証IIでは、30人中で18人(60%)だった。導いた数学的結論や、数学的に判断した内容を、根拠を明確にして説明できる生徒の割合が上がったことがわかる。しかし、Cの評価の生徒が2人(6%)おり、数学的結論が導けていないために説明ができていない生徒や、数学的結論は導けていても、説明の仕方についての手立てが足りていなかったため、説明が書けなかった生徒がいた。数学的結論を求める場面や、説明をするときのペア活動の仕方を工夫して、表・式・グラフ・図などを用いた説明ができるようにしていかなければならない。

(2) 成果と課題

- 数学的モデル化を位置づけた授業展開をしたことで、生徒が事象を数学的に捉えることができていたので、数学的結論を導く上で有効であった。
- 類似の場面を用いて考え方を活用させたことで、生徒が日常生活の中で同様の場面を見だし、事象を数学的に捉えようとする姿勢を育てることができた。このことは、数学的な見方・考え方を育てることにつながったと考えられる。
- 表・式・グラフ・図などを用いた説明の仕方について、説明のモデルを提示したり、ペアで説明を評価し合う活動を仕組むなど、手立てを工夫する必要があった。

《参考文献》

「中学校学習指導要領解説 数学編」 平成29年7月 文部科学省

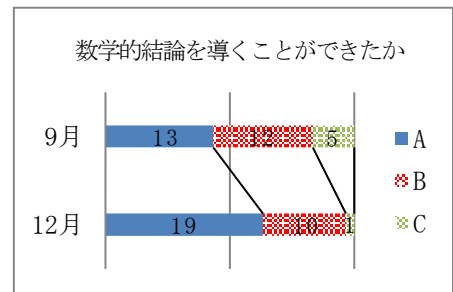
「新しい数学3」 平成24年 東京書籍

「数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究」

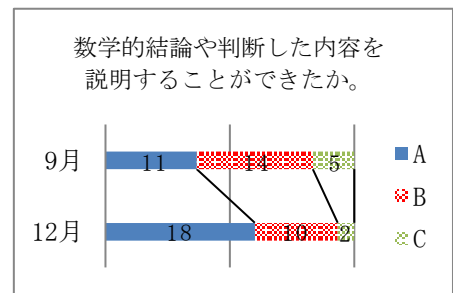
西村圭一 著



【資料3】



【資料4】



【資料5】